Primeira Prova de Teoria Eletromagnética I, 18/04/2011

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(1,0 ponto)* Demonstre a seguinte regra de produto (onde $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são funções vetoriais suaves):

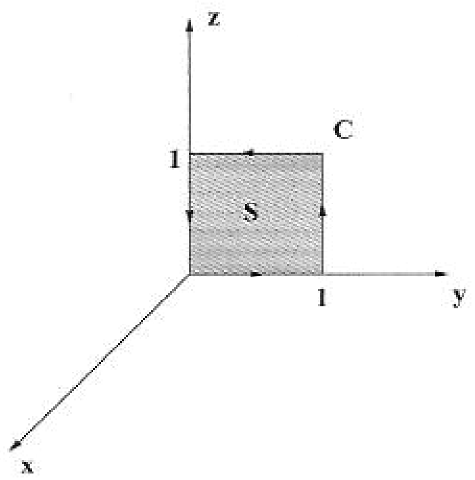
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} + \vec{A}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right). \tag{1}$$

(2ª questão) *(2,0 pontos)*

Considere um vetor $\vec{v} = (2xz + 3y^2)\hat{y} + (4yz^2)\hat{z}$, onde x, y e z denotam coordenadas retangulares.

(a) *(1,0 ponto)* Determine $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$, onde C é caminho fechado indicado no plano zy da figura abaixo.

(b) *(1,0 ponto)* Verifique a validade do teorema de Stokes para a superfície quadrada S da figura abaixo.

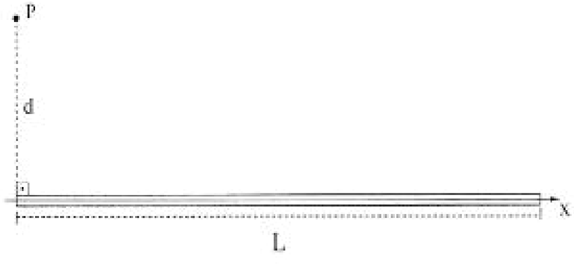


(3ª questão) *(3,5 pontos)*

Considere uma haste fina de comprimento L com densidade linear uniforme de carga λ, conforme a figura abaixo.

(a) *(2,0 pontos)* Determine o potencial elétrico no ponto P, o qual está a uma distância perpendicular d da extremidade esquerda da haste.

(b) *(1,5 pontos)* Verifique que o potencial se reduz ao potencial de uma carga pontual no limite de grandes distâncias ($d \gg L$).

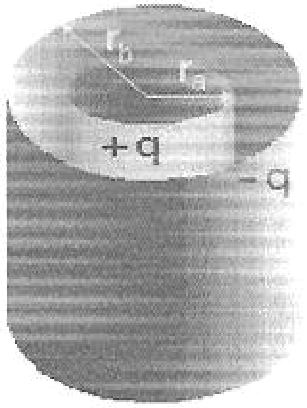


(4ª questão) *(3,5 pontos)*

Considere um cabo coaxial longo, o qual carrega densidade de carga volumétrica uniforme ρ no cilindro interno (raio r_a) e densidade de carga superficial uniforme σ no cilindro externo (raio r_b), conforme a figura abaixo. A superfície externa é carregada com carga $-q$ e a superfície interna é carregada com carga $+q$ de modo que o cabo como um todo é eletricamente neutro.

(a) *(2,0 pontos)* Determine o vetor campo elétrico gerado pelo cabo coaxial em todo o espaço.

(b) *(1,5 pontos)* Verifique que a condição de contorno $\vec{E}_{\text{fora}} - \vec{E}_{\text{dentro}}$ a ser satisfeita pelo campo elétrico é obedecida pelo cabo coaxial, onde $\vec{E}_{\text{fora}}$ é o campo *imediatamente* acima da superfície σ e $\vec{E}_{\text{dentro}}$ é o campo *imediatamente* interior à superfície σ.



(1ª QUESTÃO)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})\Big|_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,(\vec{A}\times\vec{B})\Big|_k = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,(\varepsilon_{klm}A_lB_m) = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\,(A_lB_m)$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\,(A_lB_m) = \partial_j\,(A_iB_j) - \partial_j\,(A_jB_i)$$

$$= (\partial_jA_i)B_j + A_i\,\partial_jB_j - (\partial_jA_j)B_i - A_j\,\partial_jB_i$$

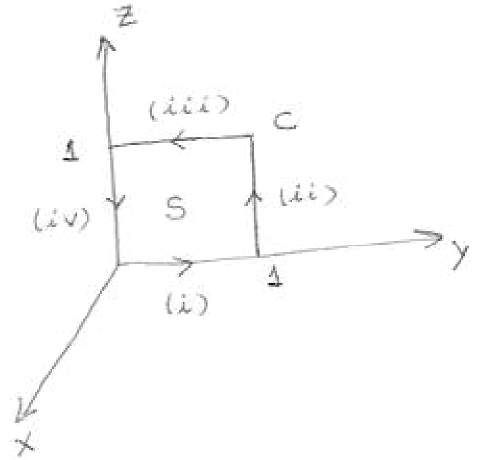
$$= B_j\,\partial_jA_i - A_j\,\partial_jB_i + A_i\,\partial_jB_j - B_i\,\partial_jA_j$$

$$= (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})A_i - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_i + A_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - B_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}$$

(2ª QUESTÃO) $\vec{v} = (2xz + 3y^2)\hat{y} + (4yz^2)\hat{z}$; $d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

a)



$$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_{(i)} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \int_{(ii)} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \int_{(iii)} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \int_{(iv)} \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

(i) $x=0,\ z=0$: $\vec{v}\cdot d\vec{l} = 3y^2\,dy$, $\int_{(i)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 3y^2\,dy = 1$

(ii) $x=0,\ y=1$: $\vec{v}\cdot d\vec{l} = 4z^2\,dz$, $\int_{(ii)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 4z^2\,dz = \frac{4}{3}$

(iii) $x=0,\ z=1$: $\vec{v}\cdot d\vec{l} = 3y^2\,dy$, $\int_{(iii)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_1^0 3y^2\,dy = -1$

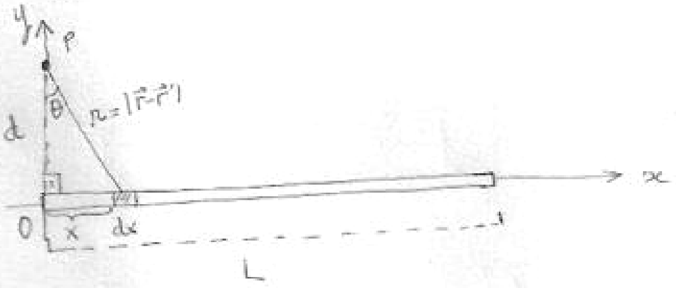
(iv) $x=0,\ y=0$: $\vec{v}\cdot d\vec{l} = 0$, $\int_{(iv)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_1^0 0\,dz = 0$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = 4/3}$$

b) Teorema de Stokes: $\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot\hat{n}\,da = \overbrace{\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l}}^{4/3}$. Mas $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (4z^2 - 2x)\hat{x} + 2z\hat{z}$

Assim: $\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot\hat{n}\,da = \int_0^1\int_0^1 4z^2\hat{x}\cdot\hat{x}\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 4z^2\,dy\,dz = \frac{4}{3}z^3\Big|_0^1\,y\Big|_0^1 = 4/3 = \oint \vec{v}\cdot d\vec{l}$ $\underline{\underline{\text{ok!}}}$

(3ª Questão)



$\vec{r} = d\,\hat{y}$

$\vec{r}' = x\,\hat{x}$

a) $V(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dl' \Rightarrow V(P) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^L \dfrac{\lambda\,dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$ (Tomando $V=0$ no infinito)

$\tan\theta = \dfrac{x}{d} \Rightarrow x = d\tan\theta \Rightarrow dx = d\sec^2\theta\,d\theta$

Além disso: $\sqrt{x^2+d^2} = \sqrt{d^2\tan^2\theta + d^2} = d\sqrt{1+\tan^2\theta} = d\sec\theta$

$\Rightarrow$ Assim: $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \int \dfrac{\cancel{d}\sec^{\cancel{2}}\theta\,d\theta}{\cancel{d}\,\cancel{\sec}\theta} = \int \sec\theta\,d\theta = \int \dfrac{\sec\theta\,(\sec\theta+\tan\theta)\,d\theta}{(\sec\theta+\tan\theta)}$

$= \displaystyle\int \dfrac{(\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \int \dfrac{du}{u}$, com $u = \tan\theta + \sec\theta = \dfrac{x+\sqrt{x^2+d^2}}{d}$

$x \to 0 \Rightarrow u \to 1$; $x \to L \Rightarrow u \to \dfrac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}$

Logo: $V(P) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln u \Big|_1^{\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}} \Rightarrow \boxed{V(P) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dfrac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right]}$

b) $V(P) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dfrac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right] = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dfrac{L+d\sqrt{1+L^2/d^2}}{d}\right] \underset{\downarrow}{\cong} \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dfrac{L}{d}+1\right]$

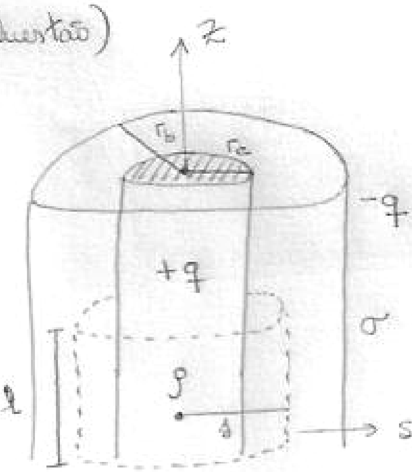
Desprezando 2ª ordem em L/d

Expansão do ln até 1ª ordem em torno de $\frac{L}{d}\to 0$

$\cong \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\ln\left(1+\dfrac{L}{d}\right)\Big|_{\frac{L}{d}\to 0}}_{=\ln(1)=0} + \underbrace{\left(\dfrac{1}{1+L/d}\right)(1)\Big|_{\frac{L}{d}\to 0}}_{1}\left(\dfrac{L}{d}-0\right) + \cdots\right]$

$\Rightarrow V(P) \cong \dfrac{\overset{=q}{\lambda L}}{4\pi\varepsilon_0\,d} \Rightarrow \boxed{V(P) \cong \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d}}$ ok! Limite da carga pontual.

(4ª Questão)



superfície Gaussiana S. Por simetria: $\vec{E} = E(s)\,\hat{s}$

a) Lei de Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ ($\vec{E}\cdot\hat{n}$ constante ao longo da superfície lateral. Nas tampas, temos $\vec{E}\cdot\underbrace{\hat{n}}_{=\hat{z}} = 0$).

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\hat{s}\int_{\substack{\text{superfície}\\ \text{lateral}}} da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(s) = \frac{q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 l s}$$

• $s \le r_a$: $E(s) = \frac{\rho \cancel{\pi} s^{\cancel{2}} \cancel{l}}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0 \cancel{l} \cancel{s}} = \frac{\rho s}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho s}{2\varepsilon_0}\hat{s} \quad (s \le r_a)}$

• $r_a \le s < r_b$: $E(s) = \frac{\rho \cancel{\pi} r_a^2 \cancel{l}}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0 \cancel{l} s} = \frac{\rho r_a^2}{2\varepsilon_0 s} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r_a^2}{2\varepsilon_0 s}\hat{s}} \; \boxed{(r_a \le s < r_b)}$

• $s > r_b$: $E(s) = \frac{0}{2\pi\varepsilon_0 l s} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0} \quad (s > r_b)}$

b) Temos uma descontinuidade de $\vec{E}$ em r_b. Os valores de $\vec{E}$ imediatamente acima e abaixo da descontinuidade são:

$$\vec{E}_{acima} = \vec{0} \quad \left(= \vec{E}_{FORA} \right)$$

$$\vec{E}_{abaixo} = \left. \frac{\rho r_a^2}{2\varepsilon_0 s} \hat{s} \right|_{s=r_b} = \frac{\rho r_a^2}{2\varepsilon_0 r_b} \hat{s} \quad \left(= \vec{E}_{DENTRO} \right)$$

Portanto: $\vec{E}_{acima} - \vec{E}_{abaixo} = -\dfrac{\rho r_a^2}{2\varepsilon_0 r_b} \hat{s}$

Mas $= \rho \pi r_a^2 \ell \Rightarrow \rho r_a^2 = \dfrac{q}{\pi \ell} \Rightarrow \vec{E}_{acima} - \vec{E}_{abaixo} = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_b \ell} \hat{s}$

Por outro lado: $-q = \sigma 2\pi r_b \ell \Rightarrow -\dfrac{q}{\ell} = \sigma 2\pi r_b \Rightarrow \vec{E}_{acima} - \vec{E}_{abaixo} = \dfrac{\sigma \cancel{2\pi} \cancel{r_b}}{\cancel{2\pi} \varepsilon_0 \cancel{r_b}} \hat{s}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{acima} - \vec{E}_{abaixo} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{s}}$ OK! Condição de descontinuidade é satisfeita.